

МЫРЗАҚҰЛ АҚБОТА РАТБАЙҚЫЗЫ

Исследование некоторых интегрируемых многослойных спиновых систем и их связи с многокомпонентными нелинейными уравнениями Шредингера

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — Математика

Актуальность темы исследования. В последние десятилетия возрастает интерес к изучению теории интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений (ИНЭУ). Это связано с тем, что ИНЭУ имеют приложения в различных областях науки, в том числе, естественных наук. Например, в дифференциальной геометрии они могут воспроизвести интегрируемые классы кривых и поверхностей, а в физике они описывают нелинейную динамику волновых процессов. Созданию теории ИНЭУ посвящены работы Абловица М., Сигура Х., Лэма Дж., Додда Р., Ньюэлла А., Новикова С.П., Захарова В.Е., Шабата А.Б., Лакшманана М., Динга К. и др.

Вопросом о связи однослойных ИНЭУ с дифференциальной геометрией посвящены работы Бордага Л., Яновского А., Мартины Л, Анко С. и др. Актуальность исследования многослойных ИНЭУ обосновывается развитием современной науки в данном направлении.

Цель работы. Исследование многокомпонентных нелинейных эволюционных уравнений Шредингерского типа и нахождение эквивалентных к ним многослойных спиновых систем на основе теории ИНЭУ. Разработка обобщенного метода установления геометрической и калибровочной эквивалентности между однослойными ИНЭУ для многослойных, а также нахождения их точных решений для двухслойных случаев.

Методика исследования. В диссертационной работе за основу методики исследования берутся известные методы теории солитонов как методы установления геометрической и калибровочной эквивалентности между однослойными ИНЭУ и метод преобразования Дарбу для нахождения их точных решений. Так как в диссертационной работе исследуются многокомпонентные ИНЭУ, выше названные методы исследования однокомпонентных ИНЭУ расширяются для многокомпонентных случаев.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту и результаты исследования:

На защиту выносятся следующие результаты исследования, полученные в рамках диссертационной работы:

- новый метод установления эквивалентности между интегрируемыми нелинейными уравнениями на основе свойств алгебр Ли;
- геометрическая и калибровочная эквивалентности между двухслойными интегрируемыми уравнениями;

– точное решение Γ – спин системы и его связь с решением двухслойной спиновой системы;

– обобщение метода установления геометрической эквивалентности между двухслойными интегрируемыми уравнениями для n -слойных случаев.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и внесет вклад для дальнейшего развития теории многослойных интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Основное содержание работы.

В первом разделе впервые предложен метод установления эквивалентности между однослойными интегрируемыми нелинейными уравнениями на основе свойств изоморфизма алгебр Ли $su(2)$ и $so(3)$. Метод продемонстрирован на нелинейном уравнении Шредингера

$$iq_t + q_{xx} + 2\bar{q}q^2 = 0,$$

и уравнений ферромагнетика Гейзенберга (УФГ)

$$\vec{S}_t = \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx},$$

а также на уравнениях Шредингера типа и обобщенном УФГ. Здесь $q(x, t)$ – комплекснозначная функция, $\vec{S}(x, t)$ – спиновый вектор.

Во втором разделе выведена двухслойная спиновая система (СС)

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1A_x + v_1[\sigma_3, A] = 0,$$

$$iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2B_x + v_2[\sigma_3, B] = 0,$$

где $u_j, v_j (j = 1, 2)$ – потенциалы связи, A и B – спиновые матрицы, и установлена ее геометрическая связь с двухкомпонентной системой Манакова

$$iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 = 0,$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 = 0.$$

В третьем разделе показано, что эквивалентным аналогом многослойной спиновой системы

$$iA_t^{(1)} + \frac{1}{2}[A^{(1)}, A_{xx}^{(1)}] + iu_1A_x^{(1)} + v_1[\sigma_3, A^{(1)}] = 0,$$

$$iA_t^{(2)} + \frac{1}{2}[A^{(2)}, A_{xx}^{(2)}] + iu_2A_x^{(2)} + v_2[\sigma_3, A^{(2)}] = 0,$$

⋮

$$iA_t^{(N)} + \frac{1}{2}[A^{(N)}, A_{xx}^{(N)}] + iu_NA_x^{(N)} + v_N[\sigma_3, A^{(N)}] = 0,$$

является векторное нелинейное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} + vq_1 &= 0, \\
iq_{2t} + q_{2xx} + vq_2 &= 0, \\
\vdots & \\
iq_{Nt} + q_{Nxx} + vq_N &= 0,
\end{aligned}$$

где $v = 2(\sum_{j=1}^N |q_j|^2)$.

В четвертом разделе найдены решения Г-спин системы, двухслойной спин системы и обобщенного УФГ.

Внутреннее единство диссертационной работы. Результаты исследования излагаются по принципу "от простого к сложному". Сначала исследуются некоторые однослойные (однокомпонентные) нелинейные интегрируемые уравнения из различных областей математической физики, как: нелинейное уравнение Шредингера, модель ферромагнетика Гейзенберга, затем рассматриваются двухкомпонентная система Манакова и двухслойные спиновые системы. Далее, результаты исследования обобщаются для N -компонентных векторных нелинейных уравнений Шредингера.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались в международных конференциях как:

- XX Международная конференция «Geometry, Integrability, Quantization» (2-7 июня, 2018. Varna, Bulgaria);

- XIV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ – 2018» (Астана, 2018);

- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана» (Астана, 2018).

Публикации. В рамках исследования по теме диссертационной работы опубликовано 7 работ:

1. Surfaces and curves induced by nonlinear Schrodinger-type equations and their spin systems // Symmetry. – 2021. – Vol.13. – P.1827-1-1827-18 (квартильпо WoS –Q2, процентиль по Scopus – 90%).

2. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. – Vol.14, №07. – P.1750115 (квартильпо WoS –Q2, процентиль по Scopus – 47%).

3. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrödinger equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. - Vol. 14, №10. – P.1750136(квартильпо WoS –Q2, процентиль по Scopus – 47%).

4. Integrability of the two-layer spin system // Geometry, Integrability and Quantization. – 2019. – Vol.20. –P.208–214. (процентиль по Scopus – 24%).

5. Интегрируемость двух взаимодействующих кривых и геометрически-эквивалентный спиновый аналог уравнения Манакова // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2016. –Вып. 113, №4. – С. 23-26.

6. Интегрируемость двухпараметрического уравнения М-ЛШ // XIV международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2018». Тезисы докладов XIV международной научной конференции . - Астана, 2018. - Часть 1. - С.32-33.

7. Об интегрируемости спиновой системы с самосогласованным потенциалом // Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана Сборник материалов республиканской научно-практической конференции. - Астана, 2018. - С.101-106.

Цитируемость научных результатов. Основные научные результаты, полученные в рамках данной диссертации цитируются в работах ученых из дальнего зарубежья:

1. Третья работа из выше приведенного списка опубликованных работ трижды цитируется зарубежными авторами: Zhaowen Yan, Bian Gao, Minru Chen, Jifeng Cui в журнале «Chaos, Solitons and Fractals», doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.011; Nana Jiang, Meina Zhang, Jiafeng Guo, Zhaowen Yan в журнале «Chaos, Solitons and Fractals», doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109644; Rong Han, Haichao Sun, Nana Jiang, Zhaowen Yan в журнале «Journal of Nonlinear Mathematical Physics», doi.org/10.1007/s44198-021-00001-0.

2. Результаты первой статьи из выше приведенного списка опубликованных работ цитируется авторами Rachel Klauss, Aaron Phillips and José M. Vega-Guzmán в журнале «Symmetry», doi.org/10.3390/sym14030465.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Диссертационная работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ следующих проектов грантового финансирования МОН РК:

1) по приоритету «Интеллектуальный потенциал страны» по теме: «Исследование обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованными источниками и его интегрируемых редукций» на 2015-2017гг.;

2) научные исследования в области естественных наук по теме «Исследование связи геометрии поверхностей/многообразий и интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений» на 2020-2022гг.